数学分析 B2 第 1 次习题课讲义

宗语轩

2022 春, USTC

数无形时少直觉, 形少数时难入微. 数与形, 本是相倚依, 焉能分作两边飞.

——— 华罗庚

1 写在前面

经历了上学期数学分析 B1 的学习, 相信大部分同学都能适应整套数分语言的模式, 能够用严格的数学语言去刻画证明中的结论. 现在, 我们在学习了一元 (单变量) 函数的基础上, 还要掌握多元 (多变量) 函数的性质.

数学分析 B2 主要围绕多元函数的极限、连续、可微、可积等性质展开, 在继承一元函数部分性质外, 我们会发现多元函数有很多在一元函数情况下不存在的新的现象、理论及性质. 一般来说, 这些新的现象、理论及性质一旦在二元或三元情况下存在或被证明, 则不难推广到更多元情形中而无需本质上的改变. 因此，基于本课程的定位, 我们以二元或三元情况讨论为主, 这样以便于我们借助直观来学习这些内容. 如果想更系统更深入地学习多变量这部分的理论可以直接参考数学专业用的教材/参考书 (群文件里也有).

关于数学分析 B2 学习的建议: 数学分析 B2 所涉及到的知识点非常之多, 琐碎, 而且很多内容一开始接触并不容易理解. 同时这门课的很多内容和结论都会直接用于数学的后续课程和其他学科中, 而不仅仅是应付考试. 所以关于 B2 的学习我并不主张过度刷题, 而是更倾向把教材 (包括参考书) 和老师讲授的内容反复咀嚼消化, 把概念理解清楚 (当然也不要一直拘泥于细节中), 建成自己的知识体系.

(~~像我当时 B2 学场论时直接摆烂, 以至于后续再学 PDE 的时候开始连分部积分都不会用~~)

[0]个人主页: http://home.ustc.edu.cn/~zyx240014/.

发现错误欢迎联系: zyx240014@mail.ustc.edu.cn.

这门课作业和考试要求相比数分 B1 来说没有那么多的证明, 而是更侧重计算 (~~否则一些证明题助教们会带着大家一起寄~~). 所以大家务必独立完成作业里的所有计算题, 而且每道题要一步步算清楚, ~~以避免考完试出现 “题目我都会, 但我因算错就被扣了 20 分” 的现象发生~~.

最后还是拿程老师的名言结尾: “Calculus 和 Analysis 两手都要抓! 两手都要硬! ” 祝大家在学习中享受乐趣, 发现兴趣, 生活愉快!

2 专题选讲

2.1 二重外积和 Lagrange 恒等式

以下我们在标准正交基 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ 下进行:

我们已经知道, 向量的内积运算里等式 $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$ 是未必成立的 (详见教材习题 **8.1.3(4)**), 现在我们来探究向量的外积运算是否满足结合律. 回答此问题之前, 我们先来探究**二重外积** $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$ 等于什么?

不妨设 $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 不共线, 从外积的定义可知, $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$ 垂直于由 $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 生成 (张成) 的平面 π. 而 $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$ 与 $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$ 垂直, 因此 $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$ 在平面 π 内, 即存在 x_1,x_2, 使得 $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = x_1\boldsymbol{b}+x_2\boldsymbol{c}$. 现在我们来求 x_1, x_2 的值.

命题 2.1.1 (**二重外积公式**)**.** 对任意向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$, 有

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}.$$

证明. 设 $\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{b} = b_1\boldsymbol{e}_1 + b_2\boldsymbol{e}_2 + b_3\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{c} = c_1\boldsymbol{e}_1 + c_2\boldsymbol{e}_2 + c_3\boldsymbol{e}_3$. 我们已知

$$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c} = (b_2c_3 - b_3c_2)\boldsymbol{e}_1 + (b_3c_1 - b_1c_3)\boldsymbol{e}_2 + (b_1c_2 - b_2c_1)\boldsymbol{e}_3.$$

设 $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = d_1\boldsymbol{e}_1 + d_2\boldsymbol{e}_2 + d_3\boldsymbol{e}_3$. 则

$$\begin{aligned} d_1 &= a_2(b_1c_2 - b_2c_1) - a_3(b_3c_1 - b_1c_3) \\ &= b_1(a_2c_2 + a_3c_3) - c_1(a_2b_2 + a_3b_3) \\ &= b_1(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c} - a_1c_1) - c_1(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} - a_1b_1) \\ &= (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})b_1 - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})c_1. \end{aligned}$$

同理

$$d_2 = (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})b_2 - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})c_2, \quad d_3 = (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})b_3 - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})c_3.$$

所以

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}.$$

□

由二重外积公式和外积的反交换律, 得

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=-\boldsymbol{c}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=-(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}.$$

又因为等式 $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$ 未必成立, 故等式 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$ 未必成立, 即向量的外积运算不满足结合律.

我们下面来看几个二重外积公式的应用:

例 2.1.1. 若 $|\boldsymbol{x}|,|\boldsymbol{y}|>0$. 证明: $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y}$ 共线 $\Longleftrightarrow\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 共线.

证明. 利用二重外积公式, 我们有

$$\boldsymbol{x}\text{ 与 }\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y}\text{ 共线 }\Longleftrightarrow\boldsymbol{x}\times(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y})=\boldsymbol{0}\Longleftrightarrow(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y})\boldsymbol{x}=|x|^2\boldsymbol{y}\Longleftrightarrow\boldsymbol{x}\text{ 与 }\boldsymbol{y}\text{ 共线.}$$

□

例 2.1.2. 证明 **Jacobi 等式**:

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})+\boldsymbol{b}\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})+\boldsymbol{c}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\boldsymbol{0}.$$

证明. 利用二重外积公式, 我们有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})&=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c},\\ \boldsymbol{b}\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})&=(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a},\\ \boldsymbol{c}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})&=(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}.\end{aligned}$$

对上述三个等式相加即得 Jacobi 等式. □

例 2.1.3. 记 $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$. 证明: 对任意向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$, 有

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c},\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})=(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})^2.$$

证明. 利用二重外积公式和混合积的性质, 我们有

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c},\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})&=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\\ &=\{[(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}]\boldsymbol{b}-[(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}]\boldsymbol{c}\}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= [(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}]\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\\
&= (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})^2
\end{aligned}
$$

□

我们还可以利用二重外积公式证明如下定理:

定理 2.1.1 (Lagrange 恒等式). 对任意向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}$, 有

$$
(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}) = \begin{vmatrix}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c} & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d}\\ \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c} & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d}\end{vmatrix}.
$$

证明. 利用混合积的性质和二重外积公式, 我们有

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}) &= \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})\\
&= \boldsymbol{a}\cdot[(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d})\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{d}]\\
&= (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d})-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\\
&= \begin{vmatrix}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c} & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d}\\ \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c} & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d}\end{vmatrix}.
\end{aligned}
$$

□

我们下面来看几个 Lagrange 恒等式的应用:

命题 2.1.2 (二维勾股定理). 直角三棱锥斜面面积的平方等于其他三个直角面面积的平方和.

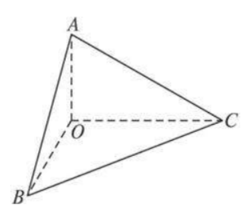

图 1

证明. 如图 1, 设 $O-ABC$ 是直角三棱锥, $\triangle ABC$ 是其斜面. 利用 Lagrange 恒等式及 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=0$, 我们有

$$
\begin{aligned}
|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|^2 &= (\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})\cdot(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})\\
&= \begin{vmatrix}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB} & \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\\ \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB} & \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AC}\end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= |\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2 - (\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2 \\
&= (|\overrightarrow{OA}|^2+|\overrightarrow{OB}|^2)(|\overrightarrow{OA}|^2+|\overrightarrow{OC}|^2) - [(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})\cdot(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})]^2 \\
&= |\overrightarrow{OA}|^4+|\overrightarrow{OA}|^2|\overrightarrow{OB}|^2+|\overrightarrow{OA}|^2|\overrightarrow{OC}|^2+|\overrightarrow{OB}|^2|\overrightarrow{OC}|^2-|\overrightarrow{OA}|^4 \\
&= (|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|)^2+(|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OC}|)^2+(|\overrightarrow{OB}||\overrightarrow{OC}|)^2.
\end{aligned}
$$

对上述等式两边同乘 $\dfrac{1}{4}$, 变形可知该命题成立. □

例 2.1.4. 证明: 对任意向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}$, 有

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})+(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{d})+(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{d})=0.$$

证明. 利用 Lagrange 恒等式, 我们有

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}) &= (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d})-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}),\\
(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{d}) &= (\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a})(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{d})-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d})(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}),\\
(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{d}) &= (\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d})-(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{d})(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}).
\end{aligned}
$$

对上述三个等式相加, 得

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})+(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{d})+(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{d})=0.$$

□

2.2 两直线间的度量关系

已知两条直线 l_1, l_2. 下面我们考虑 l_1, l_2 间的度量关系.

定义 2.2.1. 两条直线上的点之间的最短距离称为这**两条直线的距离**.

如果 $l_1//l_2$, 则 l_1 上任意一点到 l_2 的距离就是 l_1 与 l_2 的距离; 如果 l_1 与 l_2 相交或重合, 则 l_1 与 l_2 的距离为 0.

现在我们考虑 l_1 与 l_2 异面的情形. 如图 2, 设 l_i 经过点 M_i, 方向向量为 $\boldsymbol{v}_i(i=1,2)$, 且 $\boldsymbol{v}_1$ 与 $\boldsymbol{v}_2$ 不共线, $M_i\neq M_2$.

定义 2.2.2. 若直线 l 分别与两条异面直线 l_1, l_2 垂直相交, 则称直线 l 是 l_1 与 l_2 的**公垂线**, 两垂足的连线段称为**公垂线段**.

命题 2.2.1. 两条异面直线 l_1 与 l_2 的公垂线存在且唯一.

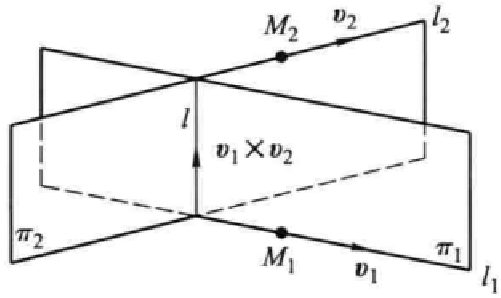

图 2

证明. *存在性* 因为 $\boldsymbol{v}_1$ 与 $\boldsymbol{v}_2$ 不共线, 所以 $\boldsymbol{v}_1$ 与 $\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{v}_2$ 不共线. 故 M_1,$\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{v}_2$ 决定一个平面 π_1. 同理,M_2,$\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{v}_2$ 决定一个平面 π_2. 因为 $\boldsymbol{v}_1$ 与 $\boldsymbol{v}_2$ 不共线, 由补充习题 **2** 知, π_1, π_2 的法向量 $\boldsymbol{v}_1\times(\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{v}_2)$, $\boldsymbol{v}_2\times(\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{v}_2)$ 不共线. 故 π_1, π_2 相交于直线 l, l 的方向向量是 $[\boldsymbol{v}_1\times(\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{v}_2)]\times[\boldsymbol{v}_2\times(\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{v}_2)]=|\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{v}_2|^2(\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{v}_2)$. 而 $\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{v}_2\perp\boldsymbol{v}_i(i=1,2)$, 所以 $l\perp l_i(i=1,2)$. 故 l 是 l_1 与 l_2 的公垂线.

唯一性 设 l' 是 l_1 与 l_2 的公垂线, 则 l 与 l' 的方向向量均为 $\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{v}_2$ 且均为 π_1, π_2 的交线. 故 l' 与 l 重合. □

命题 2.2.2. 两条异面直线 l_1 与 l_2 的公垂线段的长度即为 l_1 与 l_2 的距离.

提示. 作出由 $M_1,\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2$ 决定的平面 π, 再考虑 l_2 在 π 上的投影即可.

命题 2.2.3. 两条异面直线 l_1, l_2 间的距离为

$$d=\frac{|\overrightarrow{M_1M_2}\cdot\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{v}_2|}{|\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{v}_2|}.$$

证明. 我们已知, $\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{v}_2$ 为 l_1, l_2 的公垂线段 P_1P_2 的方向向量. 定义单位向量 $\boldsymbol{e}=\dfrac{\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{v}_2}{|\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{v}_2|}$. 则

$$d=|\overrightarrow{P_1P_2}|=|\overrightarrow{P_1P_2}\cdot\boldsymbol{e}|=|(\overrightarrow{P_1M_1}+\overrightarrow{M_1M_2}+\overrightarrow{M_2P_2})\cdot\boldsymbol{e}|=|\overrightarrow{M_1M_2}\cdot\boldsymbol{e}|=\frac{|\overrightarrow{M_1M_2}\cdot\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{v}_2|}{|\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{v}_2|}.$$

□

几何意义: 两条异面直线 l_1, l_2 间的距离 d 等于以 $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ 为棱的平行六面体的体积除以以 $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ 为邻边的平行四边形的面积.

例 2.2.1. 求直线 $l_1: x-1=y-2=z-3$ 和直线 $l_2: x=2y=3z$ 的夹角 θ、距离 d 以及公垂线 l 的方程.

解. l_1, l_2 分别过 $M_1(1,2,3)$, $M_2(0,0,0)$. l_1, l_2, l 的方向向量分别是

$$\boldsymbol{v}_1 = (1,1,1), \quad \boldsymbol{v}_2 = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}), \quad \boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2 = (-\frac{1}{6}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{2}).$$

所以

$$\theta = \arccos \frac{|\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_2|}{|\boldsymbol{v}_1||\boldsymbol{v}_2|} = \arccos \frac{11\sqrt{3}}{21}, \quad d = \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot \boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2|}{|\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2|} = \frac{\sqrt{26}}{13}.$$

又因为

$$(\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2) \times \boldsymbol{v}_1 = (\frac{7}{6}, -\frac{1}{3}, -\frac{5}{6}), \quad (\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2) \times \boldsymbol{v}_2 = (\frac{17}{36}, -\frac{4}{9}, -\frac{3}{4})$$

故得 l_1 和 l 所决定的平面 π_1 的方程是 $7x - 2y - 5z + 12 = 0$, l_2 和 l 所决定的平面 π_2 的方程是 $17x - 16y - 27z = 0$. 于是 l 的一般方程是

$$\begin{cases} 7x - 2y - 5z + 12 = 0, \\ 17x - 16y - 27z = 0. \end{cases}$$

□

2.3 旋转面、柱面和锥面方程的建立

以下我们在三维欧氏空间中进行:

1 旋转面 在课堂中, 我们已经接触了几类旋转面, 例如球面, 它可以看成一个半圆绕其直径旋转一周所形成的曲面. 现在我们来研究更一般的情形.

定义 2.3.1. 如图 3 所示, 一条曲线 Γ 绕一条直线 l 旋转所得的曲面称为**旋转面**. 其中 l 称为**轴**, Γ 称为**母线**. 母线 Γ 上每个点 M_0 绕 l 旋转得到的一个圆称为**纬圆**. 由定义知, l 垂直于纬圆所在的平面.

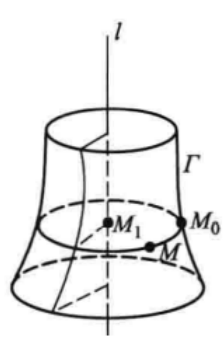

图 3

设轴 l 经过点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$, 其方向向量为 $\boldsymbol{v}(l, m, n)$, 母线 Γ 的方程为 $\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ G(x,y,z)=0. \end{cases}$ 下面我们来求旋转面的方程.

点 $M(x, y, z)$ 在旋转面上的充分必要条件是点 M 在经过母线 Γ 上某一点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 的纬圆上, 即存在母线 Γ 上的一点 M_0, 使得 M 和 M_0 到轴 l (或轴 l 上任意一点 M_1) 的距离相等, 且 $\overrightarrow{M_0M} \perp l$ (简而言之就是 "等距"+"垂直"). 我们据此列出方程组:

$$\begin{cases} F(x_0, y_0, z_0) = 0, \\ G(x_0, y_0, z_0) = 0, \\ |\overrightarrow{MM_1} \times \boldsymbol{v}| = |\overrightarrow{M_0M_1} \times \boldsymbol{v}| \Longleftrightarrow |\overrightarrow{MM_1}| = |\overrightarrow{M_0M_1}|, \\ \overrightarrow{M_0M} \perp l \Longleftrightarrow l(x-x_0) + m(y-y_0) + n(z-z_0) = 0. \end{cases}$$

从上述方程组中消去参数 x_0, y_0, z_0 (因此我们只需保证 M_0 的存在性即可, 而并不关心 M_0 的位置), 就得到关于 x, y, z 的方程, 该方程即为所求旋转面的方程.

例 2.3.1. 求圆 $\begin{cases} (x-a)^2 + z^2 = r^2, \\ y = 0, \end{cases}$ $(0 < r < a)$ 绕 z 轴旋转所得旋转面 (我们把其称为**环面**, 见图 4) 的方程.

解. 按上述方法列出方程组 (此时取 M_1 为原点):

$$\begin{cases} (x_0 - a)^2 + {z_0}^2 = r^2, \\ y_0 = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 = {x_0}^2 + {y_0}^2 + {z_0}^2, \\ 0 \cdot (x - x_0) + 0 \cdot (y - y_0) + 1 \cdot (z - z_0) = 0. \end{cases}$$

消去参数 x_0, y_0, z_0, 得

$$(\pm\sqrt{x^2+y^2} - a)^2 + z^2 = r^2,$$

化简得

$$(x^2 + y^2 + z^2 + a^2 - r^2)^2 = 4a^2(x^2 + y^2).$$

□

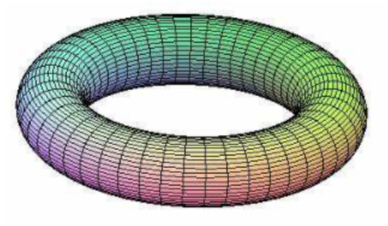

图 4

例 2.3.2. 求直线 $l:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-1}{2}$ 绕直线 $l_1:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-1}{2}$ 所得旋转面的方程.

解. 由题设知, 轴 l_1 经过 $M_1(0,0,1)$, 其方向向量 $\boldsymbol{v}(1,-1,2)$. 据此列出方程组 (此时取 $M_1(0,0,1)$):

$$\begin{cases}\dfrac{x_0-1}{1}=\dfrac{y_0+1}{-1}=\dfrac{z_0-1}{2},\\ x^2+y^2+(z-1)^2={x_0}^2+{y_0}^2+(z_0-1)^2,\\ x-x_0-(y-y_0)+2(z-z_0)=0.\end{cases}$$

我们将直线 l 表示成参数方程的形式: 令 $x_0=1+t$, $y_0=-1-t$, $z_0=1+2t$ $(t\in\mathbb{R})$. 则上述方程组转化为

$$\begin{cases}x^2+y^2+(z-1)^2=6t^2+4t+2,\\ x-y+2z=6t+4.\end{cases}$$

消去参数 t, 得:

$$x^2+y^2+(z-1)^2=6(\frac{x-y+2z-4}{6})^2+4(\frac{x-y+2z-4}{6})+2$$

化简得:

$$5x^2+5y^2+2z^2+2xy-4xz+4yz+4x-4y-4z-6=0.$$

□

2 柱面 在课堂中, 我们已经接触了圆柱面, 它可以看成一条直线沿着与其垂直的圆平行移动一周所形成的曲面. 现在我们来研究更一般的情形.

定义 2.3.2. 如图 5 所示, 一条直线 l 沿着一条空间曲线 C 平行移动时所形成的曲面称为**柱面**. 其中 l 称为**母线**, C 称为**准线**.

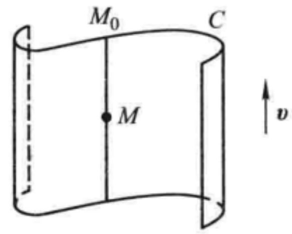

图 5

思考. 对于平面 (一种特殊的柱面) 和除去平面的柱面, 它们的准线和母线是否唯一? 母线方向是否唯一?

设一个柱面的母线 l 的方向向量 $\boldsymbol{v}(l,m,n)$, 准线 C 的方程为 $\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ G(x,y,z)=0. \end{cases}$ 下面我们来求该柱面的方程.

点 $M(x,y,z)$ 在柱面上的充分必要条件是点 M 在某一条母线上, 即存在准线 C 上的一点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$, 使得 M 在经过 M_0, 且方向向量为 $\boldsymbol{v}$ 的直线上. 我们据此列出方程组:

$$\begin{cases} F(x_0,y_0,z_0)=0, \\ G(x_0,y_0,z_0)=0, \\ x=x_0+lu, & u\in\mathbb{R}. \\ y=y_0+mu, \\ z=z_0+nu, \end{cases}$$

从上述方程组中消去参数 x_0, y_0, z_0, 得

$$\begin{cases} F(x-lu,y-mu,z-nu)=0, \\ G(x-lu,y-mu,z-nu)=0. \end{cases}$$

再消去参数 u, 就得到关于 x, y, z 的方程, 该方程即为所求柱面的方程.

如果准线 C 给出的是参数方程 $\begin{cases} x=f(t), \\ y=g(t), & (a\leqslant t\leqslant b) \\ z=h(t) \end{cases}$, 则柱面的参数方程是

$$\begin{cases} x=f(t)+lu, \\ y=g(t)+mu, & a\leqslant t\leqslant b,\ u\in\mathbb{R}. \\ z=h(t)+nu, \end{cases}$$

例 2.3.3. 已知准线 C 的方程 $\begin{cases} x = y^2 + z^2, \\ x = 2z, \end{cases}$ 母线 l 垂直于 C 所在的平面. 求 l 沿 C 平行移动所形成的柱面的方程.

解. 由题设知, l 垂直于平面 $x = 2z$, 因此 $\boldsymbol{v}$ 的方向向量是 $(1, 0, -2)$. 据此列出方程组:

$$\begin{cases} x_0 = {y_0}^2 + {z_0}^2, \\ x_0 = 2z_0, \\ x = x_0 + u, \\ y = y_0, \\ z = z_0 - 2u. \end{cases}$$

从上述方程组中消去参数 x_0, y_0, z_0, 得

$$\begin{cases} x - u = y^2 + (z + 2u)^2, \\ x - u = 2z + 4u. \end{cases}$$

再消去参数 u, 化简得

$$4x^2 + 25y^2 + z^2 + 4xz - 20x - 10z = 0.$$

□

3 锥面

定义 2.3.3. 如图 6 所示, 由空间曲线 C 上的点与不在 C 上的一个定点 M_0 的连线组成的曲面称为**锥面**. 其中 M_0 称为**顶点**, C 称为**准线**. C 上的点与 M_0 的连线称为**母线**.

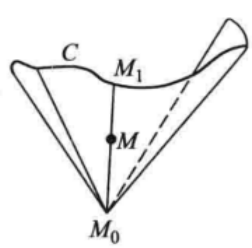

图 6

思考. 锥面的准线是否唯一?

设一个锥面的顶点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$, 准线 C 的方程为 $\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ G(x,y,z)=0. \end{cases}$ 下面我们来求该锥面的方程.

点 $M(x,y,z)(M\neq M_0)$ 在锥面上的充分必要条件是点 M 在一条母线上, 即 C 上存在一点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$, 使得 M_1 在直线 M_0M 上, 我们据此列出方程组:

$$\begin{cases} F(x_1,y_1,z_1)=0, \\ G(x_1,y_1,z_1)=0, \\ x_1=x_0+(x-x_0)u, \\ y_1=y_0+(y-y_0)u, \\ z_1=z_0+(z-z_0)u, \end{cases} \qquad u\in\mathbb{R}.$$

从上述方程组中消去参数 x_1, y_1, z_1, 得

$$\begin{cases} F(x_0+(x-x_0)u,y_0+(y-y_0)u,z_0+(z-z_0)u)=0, \\ G(x_0+(x-x_0)u,y_0+(y-y_0)u,z_0+(z-z_0)u)=0. \end{cases}$$

再消去参数 u, 就得到关于 x, y, z 的方程, 该方程即为所求锥面的方程.

如果准线 C 给出的是参数方程 $\begin{cases} x=f(t), \\ y=g(t), \\ z=h(t) \end{cases}$ $(a\leqslant t\leqslant b)$, 则锥面的参数方程是

$$\begin{cases} f(t)=x_0+(x-x_0)u, \\ g(t)=y_0+(y-y_0)u, \\ h(t)=z_0+(z-z_0)u, \end{cases} \qquad a\leqslant t\leqslant b,\ u\in\mathbb{R}.$$

对于圆锥面, 它有一根对称轴 l, 它的每条母线与轴 l 所称的角 (即**半顶角**) 相等. 除了用上述方法求圆锥面的方程外, 如果已知顶点 M_0 的位置, 轴 l 的方向向量 $\boldsymbol{v}$ 及半顶角 α, 记 M 是圆锥面上的点, 则我们可以利用

$$|\cos\theta(\overrightarrow{M_0M},\boldsymbol{v})|=\cos\alpha$$

求得圆锥面的方程. 具体例子见补充习题.

例 2.3.4. 设顶点为原点, 准线 C 的方程:$\begin{cases} x^2+y^2-3=0, \\ x^2+y^2+2z-5=0. \end{cases}$ 求原点以 C 的连线所组成的锥面的方程.

解. 按上述方法列出方程组:

$$\begin{cases} {x_1}^2+{y_1}^2-3=0, \\ {x_1}^2+{y_1}^2+2z_1-5=0, \\ x_1=xu, \\ y_1=yu, \\ z_1=zu. \end{cases}$$

从上述方程组中消去参数 x_1, y_1, z_1, 得

$$\begin{cases} x^2u^2+y^2u^2-3=0, \\ x^2u^2+y^2u^2+2zu-5=0. \end{cases}$$

再消去参数 u, 化简得

$$x^2+y^2-3z^2=0.$$

□

2.4 点集拓扑

/(ㄒoㄒ) 咕咕咕/(ㄒoㄒ)/: 本来说打算讲些点集拓扑的, 但是后来发现要系统讲完点拓的初步知识至少需要 ~~2202~~节习题课的课时量才行 (~~加之本人并未真正修过《拓扑学》这门课~~), 不如给大家推荐几本教材/讲义/参考书给感兴趣的同学自行阅读:

教材与参考书:

[1] 尤承业：基础拓扑学讲义，北京大学出版社；

[2] Munkres: Topology（熊金城教授翻译的中文版《拓扑学》行文很流畅，值得一看）；

[3] 王作勤教授的拓扑学讲义: http://staff.ustc.edu.cn/~wangzuoq/Courses/19S-Topology/index.html;

[4] Armstrong: Basic Topology;

[5] Allen Hatcher: Algebraic Topology.

[6]* 干丹岩：代数拓扑与微分拓扑简史，湖南教育出版社。

其中 [**1**], [**2**] 两本教材已放至群文件中. /(ㄒoㄒ)/咕咕咕/(ㄒoㄒ)/ .

3 补充习题

1 教材综合习题 8 T1 的推广 证明: 点 M 在 $\triangle ABC$ 内 (包括三条边) 的充分必要条件是: 存在非负实数 λ, μ, γ, 使得

$$\overrightarrow{OM}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}+\gamma\overrightarrow{OC},\quad 且\quad \lambda+\mu+\gamma=1,$$

其中 O 是空间中任意取定的一点.

提示. 先证明命题 (证明请自行完成): 点 M 在 $\triangle ABC$ 内 (包括三条边) 的充分必要条件是: 存在非负实数 λ, μ, 使得

$$\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC},\quad 且\quad \lambda+\mu\leqslant 1.$$

然后在上述等式两边同时加上向量 $\overrightarrow{OA}$ 即可.

2 证明: 对任意向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$, 有

$$[\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})]\times[\boldsymbol{b}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})]=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|^2(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}).$$

证明. 利用二重外积公式及教材习题 **8.1.12**, 我们有

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})]\times[\boldsymbol{b}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})]&=[(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{a}-|\boldsymbol{a}|^2\boldsymbol{b}]\times[|\boldsymbol{b}|^2\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}]\\&=|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\\&=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|^2(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}).\end{aligned}$$

□

3 已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 不共线, 且 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$. 证明: 存在不全为 0 的实数 k_1,k_2, 使得 $k_1\boldsymbol{a}+k_2\boldsymbol{b}+(k_1+k_2)\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$.

证明. 对等式 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}$ 两边同时点乘 $\boldsymbol{c}$, 得

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=0.$$

即向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面. 故存在不全为 0 的实数 k_1,k_2,k_3, 使得 $k_1\boldsymbol{a}+k_2\boldsymbol{b}+k_3\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$. 故

$$(k_1\boldsymbol{a}+k_2\boldsymbol{b}+k_3\boldsymbol{c})\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}\Longrightarrow k_2\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+k_3\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}.$$

同理, 对等式 $k_1\boldsymbol{a}+k_2\boldsymbol{b}+k_3\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$ 两边叉乘 $\boldsymbol{b}$, 并利用 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}$, 得

$$(k_1-k_3)\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}-k_3\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}.$$

两式相加, 由 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$ 知, $k_3=k_1+k_2$. 故存在不全为 0 的实数 k_1,k_2, 使得 $k_1\boldsymbol{a}+k_2\boldsymbol{b}+(k_1+k_2)\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$. □

4 求顶点 $M_0(1,2,3)$, 轴与平面 $2x+2y-z+1=0$ 垂直, 且母线与轴所成的角为 $\dfrac{\pi}{6}$ 的圆锥面的方程.

解. 设 M 为圆锥面上的一点. 由题设知, 轴的方向向量 $\boldsymbol{v}=(2,2,-1)$. 且

$$|\cos\theta(\overrightarrow{M_0M},\boldsymbol{v})|=\cos\frac{\pi}{6},$$

即

$$\frac{(x-1,y-2,z-3)\cdot(2,2,-1)}{3\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

化简, 得

$$11x^2+11y^2+23z^2-32xy+16xz+16yz-6x-60y-186z+342=0.$$

□

5 证明: 由 x, y, z 的齐次方程表示的曲面 (添上原点) 一定是以原点 O 为顶点的锥面.

证明. 设 $F(x,y,z)=0$ 是 n 次齐次方程, 它表示的曲面添上原点 O 后记作 S. 在 S 上任取一点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$(M_0 不是原点), 于是直线 OM_0 上任一点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$(M_1 不是原点) 满足

$$\begin{cases} x_1=x_0u, \\ y_1=y_0u, & u\neq 0, \\ z_1=z_0u. \end{cases}$$

从而有

$$F(x_1,y_1,z_1)=F(x_0u,y_0u,z_0u)=u^nF(x_0,y_0,z_0)=0.$$

因此 M_1 在 S 上. 于是整条直线 OM_0 都在 S 上, 所以 S 是由经过原点的一些直线组成的曲面. 故 S 是以原点为顶点的锥面. □